OPGAVEN VAKANTIECURSUS 2019

JORIS BIERKENS

Les 1

Stel dat de conditionele verdeling van onafhankelijke kansvariabelen $(Y_i)_{i=1}^n$, gegeven een parameter $p \in (0,1)$, is Bernoulli(p), d.w.z.

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = p \quad \text{en} \quad \mathbb{P}(Y_i = 0) = 1 - p.$$

Stel we hebben n waarnemingen van Y_i die we weergeven met $y_1, \ldots, y_n$. Als *prior* kansverdeling over p nemen we een Beta(a,b)-verdeling aan, waarbij $a > 0$ en $b > 0$. De bijbehorende kansdichtheid is

$$\pi_0(p) = cp^{a-1}(1-p)^{b-1}, \quad p \in (0,1).$$

Wat is de *posterior* kansverdeling $\pi(p) = \pi(p \mid y_1, \ldots, y_n)$ van p gegeven de observaties $y_1, \ldots, y_n$? Kun je hierin een type verdeling herkennen? Welke parameters heeft deze? *Hint*: de posterior is *proportioneel* aan de vermenigvuldiging van de prior en de kans op de waarnemingen.

Les 2

Er is waarschijnlijk slechts tijd voor één opgave tijdens de cursus. Kies of je een wiskundige pen-en-papier opgave wil maken of een algoritme wil implementeren.

Pen-en-papier opgave: correctheid van Metropolis-Hastings. Tijdens de les is (één stap van) het Metropolis-Hastings algoritme beschreven als volgt: Zij gegeven een proposal Markov transitiematrix Q en een kansverdeling π op een eindige toestandsruimte (bijvoorbeeld op $\mathcal{S} = \{1, \ldots, n\}$). Vanuit een toestand X_i:

(1) Stel een nieuwe toestand Y voor volgens Q.

(2) Bereken de *acceptatiekans*

$$\alpha(X_i, Y) = \min\left(1, \frac{\pi(Y)Q(Y, X_0)}{\pi(X_i)Q(X_i, Y)}\right).$$

(3) Definieer

$$X_{i+1} := \begin{cases} Y \quad (\textit{accepteer}) & \text{met kans } \alpha(X_i, Y), \\ X_i \quad (\textit{verwerp}) & \text{met kans } 1 - \alpha(X_i, Y). \end{cases}$$

Met de volgende stappen kunnen we aantonen dat dit algoritme de goede kansverdeling (π) als stationaire kansverdeling heeft. Dit betekent dat we voor de Metropolis-Hastings transitiematrix P willen aantonen dat

$$\sum_{i=1}^n \pi(i)P(i,j) = \pi(j) \quad \text{voor alle } j = 1, \ldots, n.$$

(a) Toon aan dat het voldoende is om de sterkere eigenschap van *reversibiliteit* te controleren: dat is

$$\pi(i)P(i,j) = \pi(j)P(j,i) \quad \text{voor alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

(b) Bepaal een uitdrukking voor $P(i,j)$ voor alle i,j. *Hint*: met de formule voor voorwaardelijke kans geldt

$$P(i,j) := \mathbb{P}(X_{i+1} = j \mid X_i = i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{i+1} = j \mid X_i = i, Y = k)\mathbb{P}(Y = k \mid X_i = i).$$

(c) Toon aan dat aan de reversibiliteits-eigenschap gedefinieerd onder (a) is voldaan.

Implementatie opgave: Implementeer het Metropolis-Hastings algoritme voor je favoriete kansverdeling $\pi(\boldsymbol{x})$ op $\mathbb{R}^n$. Let op: In $\mathbb{R}^n$ moeten we met dichtheden werken in plaats van discrete kansverdelingen, maar de formules zijn eigenlijk hetzelfde. We nemen als proposal keten een *Random Walk Metropolis* proposal, waarbij

$$\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{X}_i \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{X}_i, \sigma^2 \boldsymbol{I}).$$

In woorden: conditioneel op $\boldsymbol{X}_i = (X_i^1, \ldots, X_i^n) \in \mathbb{R}^n$ stellen we een nieuw punt $\boldsymbol{Y}$ voor dat normaal verdeeld is met verwachting $\boldsymbol{X}_i$ en covariantiematrix $\sigma^2\boldsymbol{I}$. Dus we maken een sprong in de buurt van $\boldsymbol{X}_i$. De bijbehorende Markov transitiedichtheidsfunctie is

$$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} (x^j - y^j)^2 \right), \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

De acceptatiekans wordt dan gegeven door

$$\alpha(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}) = \min\left(1, \frac{q(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}_i)\pi(\boldsymbol{Y})}{q(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y})\pi(\boldsymbol{X}_i)}\right).$$

Een stap van het algoritme is dus:

(1) Gegeven $\boldsymbol{X}_i$, trek $\boldsymbol{Y}$ volgens de kansdichtheidsfunctie $q(\boldsymbol{X}_i, \cdot)$.
(2) Bereken $\alpha(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y})$.
(3) Geef $\boldsymbol{X}_{i+1}$ de volgende waarde:

$$\boldsymbol{X}_{i+1} := \begin{cases} \boldsymbol{Y} & \text{met kans } \alpha(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}) \\ \boldsymbol{X}_i & \text{met kans } 1 - \alpha(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}). \end{cases}$$

Als je vertrouwd bent met Python kun je het bestand `mh-2d.py` op de website als voorbeeld gebruiken. Enige Python kennis is vereist en de Python-packages `scipy` en `numpy` dienen geinstalleerd te zijn.

(a) Wat is de stationaire verdeling die wordt gesimuleerd in `mh-2d.py`
(b) Wat wordt er als proposal-verdeling gebruikt?
(c) Wat wordt er afgebeeld in de drie grafieken?
(d) Pas de doelverdeling aan, bijvoorbeeld naar de kansverdeling die met een banaanvorm overeenkomt:

$$\pi(x^1, x^2) \propto \exp(-(x^2 - (x^1)^2)/2).$$

(e) Varieer de keuze van `alpha` in de code en onderzoek het effect.